(35) Hénon 写像のホモクリニック点および ヘテロクリニック点出現の解析的条件

京大・理　大同寛明

力学系のサドル型固定点Dの安定多様体をW_D^s，不安定多様体をW_D^uとする時，W_D^sと$W_{D'}^u$の交点は，$D=D'$ ならホモクリニック点，$D\neq D'$ならヘテロクリニック点と呼ばれる。[1] この様な点が出現すると，プリケイオティックな振舞があらわれたり，Strange Attractor が消失する時，系の挙動に種々の興味ある変化が生じる事が知られている。これらの点の出現条件を求める事は，一般には極めて困難であるが，ここでは，Hénon の二次元写像[2]：

$$(1)\quad \begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bz_n \\ z_{n+1} = x_n \qquad\qquad (a, b > 0) \end{cases}$$

において，$b \ll 1$（強散逸）の場合に，Bridges-Rowlands[3]流の摂動論的方法を用いる事によって，表題の条件を解析的に求める。

まず，Hénon 写像には二つの固定点がある事に注意し，$x=z$の値の大きな方をA，他をBとする。$a > 3(1-b)^2/4$ ではA，Bともサドルであるので，この範囲で考える。AとBのW^s, W^uの式が求まればよいが，これらは不変曲線であるから，その式を$x=f(z)$とおけば

$$(2)\quad f(f(z)) = 1 - af(z)^2 + bz$$

なる函数方程式が満たされねばならない。この方程式に，fのb巾による展開式：

$$(3)\quad f(z) = f_0(z) + bf_1(z) + b^2 f_2(z) + \cdots$$

を代入する事によって，望むオーダーまでの解$f(z)$を得る事ができる。それらの解のうちで，

$$(4)\quad f_0(z) = 1 - az^2$$

に始まるものは, Bridgesらの得た式[3]に相当し, W_A^u の A を通る分枝 ($x=f_A^u(z)$) と W_B^u の B を通る分枝 ($x=f_B^u(z)$) を含んでいる。また,

$$(5)\qquad f_0(z)=(-1\pm\sqrt{4a+1})/2a$$

に始まる解は, それぞれ, W_A^s の A を通る分枝 ($x=f_A^s(z)$) および W_B^s の B を通る分枝 ($x=f_B^s(z)$) を表わし, $0(b^2)$ まででともに放物線である。これらの式を用いて描かれた W_A^s, W_B^u, W_B^s が, Hénonのアトラクター (W_A^u に沿ってのびている) とともに, Fig.に示されている。($a=1.4$, $b=0.3$)

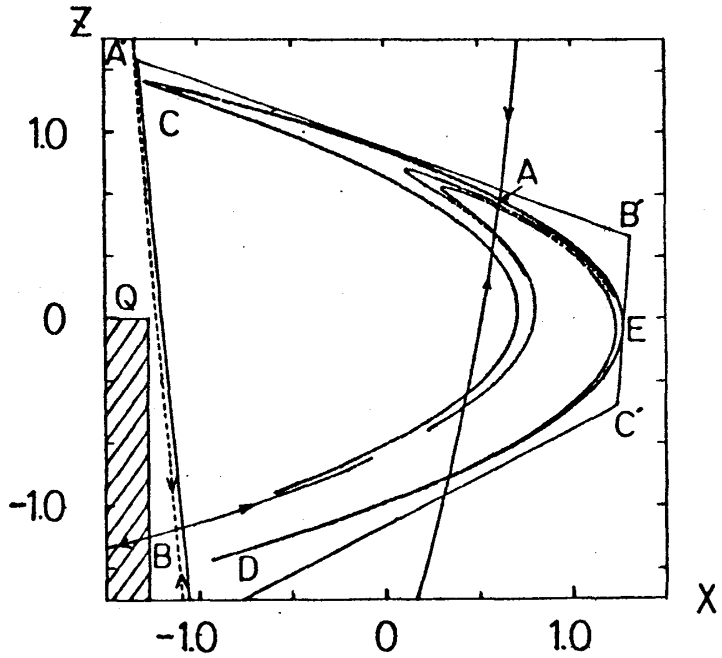

Fig.

さて, あとは, アトラクター (W_A^u) の先端部 c が W_B^s に接する a の値 $a_t(b)$ と, 他の先端部 D が W_A^s に接する a の値 $a_m(b)$ を求めればよい。つまり, $a=a_t(b)$ でサドル A と B に関するヘテロクリニック点が出現し, $a=a_m(b)$ で A のホモクリニック点が出現する。これらの値 $a_t(b)$ と $a_m(b)$ は, 上で求めた多様体の式だけからは直ちに求められないが, 簡単な幾何学的考察から, C と D のパラメーター表示がえられるので, それと W_B^s, W_A^s の式を用いて, 最終的に

$$a_t(b) = 2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8}\right) b + \left(\frac{25}{32} - \frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right) b^2 + O(b^3)$$

$$a_m(b) = 1.54369\cdots - 1.46274\cdots \times b + 0.43831\cdots \times b^2 + O(b^3)$$

を得る。これらは，例えば $b = 0.3$ のような，比較的大きな b の値に対しても，数値計算の結果と良い一致を示す。$a = a_t(b)$ は実は Hénon アトラクターの消失点に相当する。

上記の詳細と，一次元写像 $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$ に対して $a_t(0)$，$a_m(0)$ がどういう意味を持つかについては，4) を参照して下さい。

文　献

1) 例えば D. R. J. Chillingworth, Differential Topology with a View to Applications (Pitman, London, 1977) とその引用文献
2) M. Hénon, Comm. Math. Phys. **50** (1976), 69.
3) R. Bridges and G. Rowlands, Phys. Lett. **63A** (1977), 189.
4) H. Daido, submitted to Prog. Theor. Phys.